数理解析研究所講究録
第 801 巻 1992 年 155-162

Frobenius 型の歪多項式環と Tight Closure

京大教養部　吉野雄二 (*Yuji Yoshino*)

以下では, $(R, \mathfrak{m}, k)$ は標数が $p > 0$ の Noetherian local ring で, 剰余体 k は無限体であると仮定する.

R のイデアル $\mathfrak{a}$ について, その tight closure を $\mathfrak{a}^*$ と書く. 定義によって, $x \in R$ が $x \in \mathfrak{a}^*$ となるための必要十分条件は, $\exists c \in R^0 = R - \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)} \mathfrak{p}$ such that $cx^{p^n} \in \mathfrak{a}^{[p^n]}$ for $n \gg 0$. 但し, $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ のとき $\mathfrak{a}^{[p^n]} = (a_1^{p^n}, a_2^{p^n}, \ldots, a_m^{p^n})$ と定義される.

さて, この定義を見ていると次の skew polynomial ring を考えれば tight closure に関する議論が簡潔になるように考えられる.

定義 1. 次によって定義される環 A を R 上の skew polynomial ring (of Frobenius type) という.

$$A = R[X; f] = R\langle X \rangle / (Xr - r^p X \mid r \in R)$$

すなわち, A は (非可換) 変数 X をもつ R 係数の多項式全体に, 交換関係 $Xr = r^p X$ $(r \in R)$ を入れたものである.

この環 A が (right and/or left) Noetherian であれば, tight closure の理論は非常に簡明になることがわかるが, 実は不幸なことに $\dim(R) > 0$ のときには A は決して Noetherian にならない.

定理 2. (cf. [**1**])

(a) A が left Noetherian $\Longleftrightarrow$ R が体の直積.

(b) A が right Noetherian $\Longleftrightarrow$ R は全ての剰余体が完全体であるような Artin 環.

しかしながら A の両側イデアルについては昇鎖律が成立することが分かる. もっと詳しく言うと, A の任意の両側イデアル I は, R のイデアルの昇鎖列 $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ があって, $I = I_0 + I_1 X + I_2 X^2 + \cdots$ と書くことができる. (Cf. [**1**]).

環 A をつかうと tight closure の定義は次のように言い替えることができる.

補題 3. $\mathfrak{a} \subseteq R, x \in R$ のとき,

$$x \in \mathfrak{a}^* \iff cX^n Ax \subseteq \mathfrak{a} \text{ for some } c \in R^0 \text{ and } n \in \mathbb{N}.$$

この補題を見ていると次に与えられる associated primes "Asst " の概念が役にたつと予想される.

定義 4. 左 A 加群 M の元 x に対して, $\mathrm{ann}(Ax) = \{c \in A |\, cAx = 0\}$ を考えるとこれは両側イデアルなので, $\mathrm{ann}(Ax) = \sum_{n \geq 0} I_n X^n$ と書ける. 但し, $\{I_n\}_{n \geq 0}$ は R のイデアルの昇鎖列である. そこで,

$$\mathfrak{a}(Ax) = \bigcup_{n \geq 0} I_n = I_N \qquad (N \gg 0)$$

と定義する. 更に次のような素または単位イデアルの集合を考えよう.

$$\mathrm{Asst}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R \cup \{R\} |\, \mathfrak{p} = \mathfrak{a}(Ax) \text{ for some } x \neq 0 \in M\}$$

$\mathfrak{a}(Ax)$ $(x \neq 0 \in M)$ という形のイデアルのうちで包含関係にて極大なイデアル $\mathfrak{p}$ をとると, それは素または単位イデアルになることが容易に分かるので, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Asst}(M)$ である. とくに, $M \neq 0$ と $\mathrm{Asst}(M) \neq \emptyset$ は同値である. 次の補題も容易に見ることが出来る.

補題 5. 左 A 加群の完全列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ があるとき,
(a) $\mathrm{Asst}(L) \subseteq \mathrm{Asst}(M)$
(b) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Asst}(M) - \mathrm{Asst}(L) \implies \exists \mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$ such that $\mathfrak{q} \in \mathrm{Asst}(N)$
(c) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Asst}(M) - \mathrm{Asst}(N) \implies \exists \mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$ such that $\mathfrak{q} \in \mathrm{Asst}(L)$

また, $R \notin \mathrm{Asst}(M)$ ということと, X の M 上での左からの作用が単射であることは同値である. 実際, $R \in \mathrm{Asst}(M)$ なら $RX^n Ax = 0$ となる $x \neq 0 \in M$ がある. このとき $X^n x = 0$ であるから X の作用は単射ではない. 逆に $Xx = 0$ となる $x \neq 0$ があれば $RXAx = 0$ であるから, $\mathfrak{a}(Ax) = R$ となる.

次の事実も定義より容易である.

補題 6. $N \subseteq M$ が左 A 加群の essential extension のとき, もし $\mathfrak{p} \in \mathrm{Asst}(M)$ ならば $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$ となる $\mathfrak{q} \in \mathrm{Asst}(N)$ が存在する.

A は $\deg(X) = 1$ として次数を与えることによって次数付き環とみることができる. このとき次数付き左加群の Asst について簡単な注意をしておこう.

補題 7. M が次数付き左 A 加群であると仮定する．このとき，もし $\mathfrak{p} \in \mathrm{Asst}(M)$ ならば，$\mathfrak{p} = \mathfrak{a}(Ax)$ となる斉次な $x \neq 0 \in M$ がある．

証明: 適当な $y = y_r + y_{r+1} + \cdots + y_s \neq 0 \in M$ $(y_i \in M_i)$ をとって $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}(Ay)$ とできる．このとき，$\mathfrak{a}(Ay) = \bigcap_{y_i \neq 0} \mathfrak{a}(Ay_i)$ となることが分かる．$\mathfrak{p}$ は素または単位イデアルなので $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}(Ay_i)$ となる i $(r \leq i \leq s)$ がある．∎

次に変数 X によって左局所化をすることを考えよう.

定義 8. $S = \{X^n |\ n \in \mathbb{N}\}$ とおく．M が左 A 加群であるとき，${}_XM = S \times M/\sim_\ell$ と定義する．但し，$(X^n, a) \sim_\ell (X^m, b) \Longleftrightarrow \exists r > n, m;\ X^{r-n}a = X^{r-m}b$.

S は左 Ore condition を満たすことが確かめられるから，${}_XA$ は環になり，${}_XM$ は ${}_XA$ 上の左加群となる．右からの局所化はうまく定義できないことに注意しよう.

例 9.

(a) $R^\infty = \bigcup_{n \geq 0} R_{\mathrm{red}}^{p^{-n}}$（$R$ の完全閉包）とすると，自然な同型 ${}_XA \cong R^\infty[X, X^{-1}; f] = \sum_{n \in \mathbb{N}} R^\infty X^n$ がある．とくに ${}_XA = R^\infty[X, X^{-1}; f]$ も次数付き環である.

(b) 環 R に X の左からの作用を R 上の Frobenius 写像で定義して得られる左 A 加群を R_1 と書く．同様に，$(R^\infty)_1$ が定義される．このとき ${}_XA$ 加群としての自然な同型 ${}_X(R_1) \cong (R^\infty)_1$ がある.

乗法的に閉じた集合 S が R に含まれるときには，状況はもっと簡単で，S による局所化は左右で同じで，$S^{-1}A = AS^{-1} = (S^{-1}R)[X; f]$ となる.

さて次数付き injective 左 A 加群の構造を決めよう.

定理 10. (cf. [1]) $E = \sum_{n \in \mathbb{Z}} E_n$ を次数付き左 A 加群とする．$R \notin \mathrm{Asst}(E)$ と仮定するとき，次の $(a) - (e)$ の条件は皆同値である.

(a) E は次数付き左 A 加群の圏において injective な対象である.

(b) E は次数付き左 ${}_XA$ 加群の圏において injective な対象である.

(c) E_0 は injective な R^∞ 加群であり，$E = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X^n E_0$ と書ける.

（但し，各 X^nE_0 は加法群としては E_0 であり，R^∞ の元 r の X^nE_0 上での作用が E_0 上の $r^{p^{-n}}$ の作用によって定義される R^∞ 加群である．すなわち，$rX^ne = X^n r^{p^{-n}} e$ $(r \in R^\infty, e \in E_0)$ が成り立つ.）

(d) E_0 は injective R^∞ 加群であり，左 $R^\infty[X, X^{-1}; f]$ 加群としての同型

$$E \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{R^\infty}(R^\infty[X, X^{-1}; f], E_0)$$

がある.

（但し，右辺の $\underline{\mathrm{Hom}}$ は graded Hom を表す．すなわち，次数付き右 $R^\infty[X, X^{-1}; f]$ 加群 $M = \sum M_n$ と R^∞ 加群 N に対して，$\underline{\mathrm{Hom}}_{R^\infty}(M, N)$ は次数付き左 $R^\infty[X, X^{-1}; f]$ 加群 $\sum_n \mathrm{Hom}_{R^\infty}(M_{-n}, N)$ のことである.）

(e) E_0 は injective R^∞ 加群であり，左 $R^\infty[X,X^{-1};f]$ 加群としての同型

$$E \cong R^\infty[X,X^{-1};f] \otimes_{R^\infty} E_0$$

がある．

証明:

$(a) \Longrightarrow (c)$: まず (a) の仮定のもとで，X の作用による各写像 $E_n \to E_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ が全単射であることを示そう．

これが単射であることは $R \notin \mathrm{Asst}(E)$ であることから出る．全射であることを示す．任意の $y \in E_{n+1}$ に対して左 A 加群の写像 $\varphi : A \to E$ を $\varphi(a) = ay$ $(a \in A)$ によって定義する．このとき E が次数付き A 加群として injective であるから次の図式を可換にするような次数付き A 加群の写像 ψ がある．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "X\text{を右から掛ける}"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[d, "\psi"] \\
& E \arrow[r, equal] & E
\end{tikzcd}$$

従って，$y = \varphi(1) = \psi(1 \times X) = X\psi(1) \in XE$ だから，両辺の次数を比較して $y \in XE_n$ となる．結局 $E_{n+1} = XE_n$ となり X の左からの積が全単射であることが分かった．とくに E は $E = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X^n E_0$ と書けることが分かった．

次に $E = {}_XE$ となることを示す．$x \in E$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $X^n y = 0$ ならば，上でみたことより $y = 0$ が出るから，自然な写像 $E \to {}_XE$ は単射である．一方で，任意の ${}_XE$ の元は $X^{-n}y$ $(y \in E, n \in \mathbb{N})$ と書くことができるが，上のことから $X^n x = y$ となる $x \in E$ を取ることができるので，$X^{-n}y = x \in E$ となる．これは自然な写像 $E \to {}_XE$ が全射でもあることを示している．以上によって $E = {}_XE$ が分かった．特に E には次数付き左 ${}_XA$ 加群としての構造が自然に入るわけである．

さて ${}_XA = R^\infty[X,X^{-1};f]$ であったから，E の各次数部分 E_n $(n \in \mathbb{N})$ は R^∞ 加群である．具体的に R^∞ の E_0 上での作用は次のように定義されることを注意しておこう．$r^{p^{-n}} \in R^\infty$ $(r \in R)$ と $e \in E_0$ について，

$$r^{p^{-n}} e = (X^{-n} r X^n) e$$

次にこの E_0 が R^∞ 加群として injective であることを証明しよう．そうすれば $(a) \Rightarrow (c)$ の証明は終わる．

今任意の R^∞ のイデアル $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{a}$ から E_0 への R^∞ 加群としての準同型 $g : \mathfrak{a} \to E_0$ が与えられたとする．これが R^∞ からの写像に拡大できることを示せば良い．上の g に

対して $\varphi: R^{\infty}[X, X^{-1}; f]\mathfrak{a} \to E$ を次のように定義する．

$$\varphi(rX^n a) = rX^n g(a) \quad (r \in R^{\infty}, a \in \mathfrak{a})$$

この φ が次数を保つ well-defined な左 A 加群の準同型であることなどは容易に確かめることができる．(a) の仮定によって φ は次数付き左 A 加群の準同型 $\psi: R^{\infty}[X, X^{-1}; f] \to E$ に延長できる．この ψ を $R^{\infty}[X, X^{-1}; f]$ の次数 0 の部分 R^{∞} に制限した写像を h と書くことにする．$h: R^{\infty} \to E_0$ である．明らかに h は R^{∞} 準同型であり，h の $\mathfrak{a}$ への制限は g となる．以上によって E_0 が R^{∞} 加群として injective であることが分かり，$(a) \Rightarrow (c)$ の証明が終わった．

$(c) \Longrightarrow (d)$: (c) によって $E = \sum_n X^n E_0$ であるから，定義から直ちに次の等式が得られる．

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{R^{\infty}}(R^{\infty}[X, X^{-1}; f], E_0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{R^{\infty}}(R^{\infty}X^n, E_0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X^{-n}E_0 = E$$

これで (d) が示された．

$(d) \Longrightarrow (b)$: 一般に $B = \sum_n B_n$ が可換環 B_0 上の次数付き（非可換）環で，G が injective B_0 加群であるとき，$\underline{\mathrm{Hom}}_{B_0}(B, G)$ は次数付き B 加群の圏において injective である．このことを次数付き環 ${}_XA$ と injective R^{∞} 加群 E_0 に適応すれば良い．

$(b) \Longrightarrow (a)$: 任意の A の次数付きイデアル I と I から E への左 A 準同型 φ が与えられたとする．E が injective を言うために，この φ が A からの準同型に延長することを言えばよい．X による左局所化を施して左 ${}_XA$ 準同型 ${}_X\varphi: {}_XI \to {}_XE$ が得られる．ここで E は左 ${}_XA$ 加群の構造を持つので ${}_XE = E$ である．($(a) \Rightarrow (c)$ の証明の前半を参照せよ．) (b) によって ${}_X\varphi$ は左 ${}_XA$ 準同型 $\psi: {}_XA \to E$ に延長する．$\varphi' = \psi|_A$ とすれば $\varphi': A \to E$ は次数付き左 A 準同型で $\varphi'|_I = \varphi$ である．

(e) と (d)（または (c)）の同値性は容易なので省略する．∎

上記の定理によって次数付きの injective A 加群の構造を決めるには injective R^{∞} 加群を決めればよいことが分かる．以下にみるように R が regular local ring のときに一般の injective R^{∞} 加群の構造が分かれば応用上は十分である．

しばらく R のイデアルの tight closedness と Asst の関係について考えよう．すでに [1] または [2] において示されたように次の定理が成立する．

定理 11. R のイデアル $\mathfrak{a}$ について次の 2 条件は同値である．
(a) 全ての $n \in \mathbb{N}$ について $\mathfrak{a}^{[p^n]}$ は R において tightly closed である．

(b) $\mathrm{Asst}(A/A\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Min}(R)$

この定理によって，一般に左 A 加群 M について $\mathrm{Asst}(M) \subseteq \mathrm{Min}(R)$ となる条件を考えることは重要である．

今 $T \to R$ を可換環の環準同型とする．このとき自然な環準同型 $A_T = T[X;f] \to A_R = R[X;f]$ が導かれる．したがって任意の左 A_R 加群 M は左 A_T 加群と見ることもできる．M を左 A_R (resp. A_T) 加群とみたときの Asst を $\mathrm{Asst}_R(M)$ (resp. $\mathrm{Asst}_T(M)$) と書くことにする．$\mathrm{Asst}_T(M) \subseteq \mathrm{Spec}(T) \cup \{T\}$ であることに注意しよう．次の補題が成立する．

補題 12.
(a) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Asst}_T(M) \implies \exists\mathfrak{P} \in \mathrm{Asst}_R(M)$ such that $\mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{p}R$.
(b) $\mathfrak{P} \in \mathrm{Asst}_R(M) \implies \exists\mathfrak{p} \in \mathrm{Asst}_T(M)$ such that $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{P} \cap T$.

証明:
(a) 定義より $\mathfrak{p}X^n A_T x = 0$ となる $x \neq 0 \in M$ と $n \in \mathbf{N}$ がある．すなわち $\mathfrak{p}X^{n+m}x = 0$ ($m \in \mathbf{N}$) となるから，$R\mathfrak{p}X^{n+m}x = 0$ ($m \in \mathbf{N}$) も成り立つ．これは $\mathfrak{p}X^n A_R x = 0$ を意味するから，$\mathfrak{p}R \subseteq \mathfrak{a}(A_R x)$ となる．$\mathfrak{a}(A_R x)$ という形のイデアルのうちで極大なものは Asst_R に属するのだから，$\mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{p}R$ となる $\mathfrak{P} \in \mathrm{Asst}_R(M)$ が存在する．
(b) $\mathfrak{P}X^n A_R x = 0$ となる $x \neq 0$ と $n \in \mathbf{N}$ がある．とくにこれから $(\mathfrak{P}\cap T)X^n A_T x = 0$，すなわち $\mathfrak{P}\cap T \subseteq \mathfrak{a}(A_T x)$ となる．(a) と同様にしてこれから $\mathfrak{P}\cap T$ を含む $\mathfrak{p} \in \mathrm{Asst}_T(M)$ が存在することが分かる．∎

とくにこの補題の系として次を得る．

系 13. $T \to R$ について次の条件が成立すると仮定する．
(*) $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(R)$ に対して $\mathfrak{P} \in \mathrm{Min}(R) \iff \mathfrak{P} \cap T \in \mathrm{Min}(T)$
このとき左 A_R 加群 M について次の 2 条件は同値である．
(a) $\mathrm{Asst}_R(M) \subseteq \mathrm{Min}(R)$
(a) $\mathrm{Asst}_T(M) \subseteq \mathrm{Min}(T)$

次の予想 (Hochster-Huneke) を考えよう．

予想 HH. R を weakly F-regular ring で，$\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(R)$ とするとき，$R_\mathfrak{P}$ もまた weakly F-regular である．

これは定理 11 によって，もっと一般に次の予想が正しければ良いことが分かる．

予想 A. $\mathfrak{P}$ を R の素イデアル，M は左 A_R 加群とする．もし $\mathrm{Asst}(M) \subseteq \mathrm{Min}(R)$ が成立すれば，左 $(A_R)_\mathfrak{P}(= A_{(R_\mathfrak{P})})$ 加群 $M_\mathfrak{P}$ に対しても $\mathrm{Asst}_{R_\mathfrak{P}}(M_\mathfrak{P}) \subseteq \mathrm{Min}(R_\mathfrak{P})$ が成り立つ．

定理 14. R が regular local ring のときに予想 A が正しければ，予想 HH は regular ring 上 finite な任意の環 R に対して正しい．

証明: T を regular ring，$T \subseteq R$ は finite extension で R は weakly F-regular とする．このとき R は CM であることが知られている．とくに $T \subseteq R$ は系 13 の条件 (*) を満足する．$\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap T$ とすると，環の拡大 $T_{\mathfrak{p}} \subseteq R_{\mathfrak{p}}$ もやはり条件 (*) を満足することは容易に確かめられる．

さて，$R_{\mathfrak{p}}$ は semi-local ring で $\mathfrak{P}R_{\mathfrak{p}}$ はその極大イデアルのひとつである．weak F-regularity という性質は極大イデアルによる局所化では保存されることが良く知られているので，$R_{\mathfrak{P}}$ が weakly F-regular であることをいうためには $R_{\mathfrak{p}}$ がそうであることを言えば良い．定理 11 によれば，このためには任意の R のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して $\mathrm{Asst}_{R_{\mathfrak{p}}}((A_R/A_R\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}}) \subseteq \mathrm{Min}(R_{\mathfrak{p}})$ を言えば十分である．$M = A_R/A_R\mathfrak{a}$ について，R が weakly F-regular であることと定理 11 によって $\mathrm{Asst}_R(M) \subseteq \mathrm{Min}(R)$ であるから，系 13 によって $\mathrm{Asst}_T(M) \subseteq \mathrm{Min}(T)$ となる．そこで A_T 加群 M について予想 A が正しいとすれば $\mathrm{Asst}_{T_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \subseteq \mathrm{Min}(T_{\mathfrak{p}})$ となるので，再び系 13 によって $\mathrm{Asst}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \subseteq \mathrm{Min}(R_{\mathfrak{p}})$ が出る．∎

最後にいくつかの予想とそれらの関係について述べて本稿を終えたい．

予想 D. R を regular local ring，S を R の乗法的に閉じた集合とする．$A = R[X; f]$ の次数付き左イデアル I について，$J = S^{-1}I \cap A$ を考える．この J もまた A の次数付き左イデアルであるが，このとき次の条件を満足する次数付き左イデアル K が存在するであろう．

$$(a) \quad I = J \cap K \qquad (b) \quad S^{-1}K = S^{-1}A$$

予想 E. 予想 D と全く同じ仮定の元で $J/I \subseteq A/I$ は次数付き左 A 加群として essential extension でない．すなわち $K \cap J = I$ となる次数付き左イデアル $K \supsetneq I$ が必ず存在する．

予想 I. R を regular local ring，$S \subseteq R$ を乗法的に閉じた集合とする．E が A 上の injective な左加群であるとき，$E' = \mathrm{Ker}(E \to S^{-1}E)$ もまた injective な左 A 加群であろう．

予想 J. R を regular local ring，S をその乗法的に閉じた集合とする．J が R^{∞} 上の injective module であるとき，$L' = \mathrm{Ker}(L \to S^{-1}L)$ もまた injective R^{∞}-module であろう．

これらの予想の間の関係は，

$$(J) \Longleftarrow (I) \Longrightarrow (D) \Longrightarrow (E)$$

であり，これら全ての予想は regular local ring に対する予想 A を従う．とくに定理 14 によれば regular ring 上 finite な任意の環について予想 HH が成り立つことがこれらの予想のどれからも導かれる．

REFERENCES

1. Y. Yoshino, *Frobenius* 写像を添加した環, 第１３回可換環論シンポジウム報告集 (1991), 111–117.
2. Y. Yoshino, *Skew polynomial rings of Frobenius type and the theory of tight closures*, (in preparation) (1992).